تطبيقات وتدريب على بعض المواضيع المهمة لمادة

Math251

اتمنى من الجميع الاستفادة منه

لا تنسونا من دعواتكم

!!

Chapter 1

Gaussian Elimination

- ***Use Gaussian Elimination to Solve the system of linear equation?***

$x_1 + 5x_2 = 7$

$-2x_1 - 7x_2 = -5$

الحل :

نضع المعادلة الخطية على صورة
Augmented
يعني على شكل مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad R_2 \to R_2 + 2R_1$$

نضرب الصف الأول بـ موجب 2 ونضيفه للصف الثاني

$R_2 + 2R_1$

-2 + 2 (1)=0

-7 + 2(5)=3

-5 + 2(7)=9

R_2 تعني الصف الثاني

R_1 تعني الصف الاول

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{R_2}{3}$$

نقسمه الصف الثاني على 3

$\frac{R_2}{3}$ $\quad \frac{0}{3} = 0$

$\frac{3}{3} = 1$

$\frac{9}{3} = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad R_1 \to R_1 - 5R_2$$

نضرب الصف الثاني بـ سالب 5- ونضيفه للصف الأول

$R_1 - 5R_2$

$1 - 5 \times (0) = 1$

$5 - 5 \times (1) = 0$

$7 - 5 \times (3) = -8$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الناتج النهائى:

$$\boxed{x_1 = -8 \quad , \quad x_2 = 3}$$

تطبيق على 3 × 3 :

- ***Use Gaussian Elimination to Solve the system of linear equation?***

$x-3y+z=4$

$2x-8y+8z=-2$

$-6x-3y-15z=9$

الحل :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -8 & 8 & -2 \\ -6 & -3 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

نضرب الصف الأول بـ سالب -2 ونضيفه للصف الثاني

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

نضرب الصف الأول بـ موجب +6 ونضيفه للصف الثالث

$R_3 \to R_3 + 6R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & -10 \\ 0 & -15 & -9 & 33 \end{bmatrix}$$

نقسمه الصف الثاني على 2 −

$R_2 \to \frac{R_2}{-2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -15 & -9 & 33 \end{bmatrix}$$

نضرب الصف الثاني بـ موجب +15 ونضيفه للصف الثالث

$R_3 \to R_3 + 15R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -54 & 108 \end{bmatrix}$$

نقسمه الصف الثاني على 54 −

$R_3 \to \frac{R_3}{-54}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{z=-2}$	$y-3z=5$ $y-3(-2)=5$ $y+6=5$ $y=5-6$ $\boxed{y=-1}$	$x-3y+z=4$ $x-3(-1)+(-2)=4$ $x+3-2=4$ $x+1=4$ $x=4-1$ $\boxed{x=3}$

- **Matrix properties خصائص المصفوفات :**
  1. $A + B = B + A$
  2. $A + (B + C) = (B + A) + C$
  3. $A(BC) = (AB)C$

Note: In Matrix $AB \neq BA$

- **Zero Matrix : المصفوفة الصفرية**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Identity Matrix مصفوفة الوحدة**

لابد أن يكون القطر واحد

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Inverse of a Matrix مقلوب المصفوفة أو النظير الضربي للمصفوفة**

القاعدة :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

لاحظ تبديل موقعي عنصري القطر الرئيس ، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1}

det(A)= $ad - bc$

OR

$|A| = ad - bc$

لإيجاد قيمة المحددة ويرمز لها

$A\,A^{-1} = I \text{ and } A^{-1}A = I$

إذا ضربنا المصفوفة في مقلوب المصفوفة يعطينا المصفوفة الوحدة

إذا كانت قيمة المحددة = 0 فليس للمصفوفة نظير ضربي

$|A| = 0$

- Calculating the Inverse of a 2 × 2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution: الحل:

اولاً : إيجاد قيمة المحددة .

ثانياً : إيجاد المقلوب حسب القانون .

1. $\det(A) = (6)(2) - (1)(5)$

   $= 12 - 5 = 6$

2. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$

Using the Row operation – find inverse (New method) طريقة آخر لإيجاد المقلوب للمصفوفة :

- Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$

Solution الحل

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ضرب المصفوفة في المصفوفة الوحدة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \to R_2 + 2R_1$$

نضرب الصف الأول بـ موجب 2 ونضيفه للصف الثاني

$R_2 + 2R_1$

-2 + 2 (1)=0

-7 + 2(3)=-1

0 + 2(1)=2

1 + 2(0)=1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] R_2 \to (-1)R_2$$

ضرب الصف الثاني بـ سالب 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] R_1 \to R_1 - 3R_2$$

نضرب الصف الثاني بـ سالب 3- ونضيفه للصف الأول

$R_1 - 3R_2$

$1 - 3 \times (0) = 1$

$3 - 3 \times (1) = 0$

$1 - 3 \times (-2) = -7$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$ *and* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ الناتج النهائي

Solution of a Linear System by Matrix Inversion: حل المعادلة الخطية بواسطة مقلوب المصفوفة

القاعدة :

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b$$

- Find the Solution of system of linear equation Using A^{-1} ?

$x + 3y = 1$

$2x + 5y = 3$

Solution : الحل:

يمكنك كتابة المعادلة السابق على الشكل

$$A \qquad x \qquad = \qquad b$$

Coefficient مصفوفة المعاملات — Variable مصفوفة المتغيرات — Constant مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x = A^{-1}b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \to R_2 - 2R_1$$

نضرب الصف الأول بـ سالب 2 ونضيفه للصف الثاني

$R_2 - 2R_1$

2 - 2 (1)=0

5 - 2(3)=-1

0 - 2(1)=-2

1 - 2(0)=1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] R_2 \to (-1)R_2$$

ضرب الصف الثاني سالب 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] R_1 \to R_1 - 3R_2$$

نضرب الصف الثاني بـ سالب 3- ونضيفه للصف الأول

$R_1 - 3R_2$

$1 - 3 \times (0) = 1$

$3 - 3 \times (1) = 0$

$1 - 3 \times (2) = -5$

$0 - 3 \times (-1) = 3$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

So $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1}b = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)(1) + (3)(3) \\ (2)(1) + (-1)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 + 9 \\ 2 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x = A^{-1}b}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = 4 \qquad and \qquad y = -1}$: الناتج النهائي

Properties of the Transpose خصائص تدوير

تعني تحويل الصف الى عمود أو العكس .

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(A - B)^T = A^T - B^T$

(d) $(kA)^T = kA^T$

(e) $(AB)^T = B^T A^T$

Triangular Matrices المصفوفات مثلثية الشكل

Upper and Lower Triangular Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

A general 4×4 upper triangular matrix

A general 4×4 lower triangular matrix

(a) The transpose of a lower triangular matrix is upper triangular, and the transpose of an upper triangular matrix is lower triangular.

(b) The product of lower triangular matrices is lower triangular, and the product of upper triangular matrices is upper triangular.

(c) A triangular matrix is invertible if and only if its diagonal entries are all nonzero.

(d) The inverse of an invertible lower triangular matrix is lower triangular, and the inverse of an invertible upper triangular matrix is upper triangular.

Chapter 2

Determinants المحددات

القاعدة :

يرمز لمحددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

وقيمتهما تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

القطر الرئيس

مثال :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = (4)(6) - (-3)(5) = 39$$

Minors and Cofactors

اشارات المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Minors لإيجاد

a_{ij} or M_{ij}

i تعني الصف

j تعني العمود

Cofactors لإيجاد

تدل على اشارة الموقع

a_{ij} or $C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$

- Find the Minors and cofactors $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $the\ minors\ a_{1\,1}$?

بحذف الصف الاول

$M_{1\,1}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

بحذف العمود الاول

$$M_{1\,1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (5)(8) - (4)(6) = 16$$

The cofactors of $a_{1\,1}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$$C_{1\,1} = (-1)^{1+1} \times M_{1\,1}$$

$$C_{1\,1} = (-1)^{2} \times 16 = 16$$

$The\ minors\ a_{1\,2}$?

$M_{1\,2}$

بحذف الصف الاول

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

بحذف العمود الثاني

$$M_{1\,2} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (1)(6) = 10$$

The cofactors of $a_{1\,2}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$$C_{1\,2} = (-1)^{1+2} \times M_{1\,2}$$

$$C_{1\,2} = (-1)^{3} \times 10 = -10$$

$The\ minors\ a_{3\,2}$?

$M_{3\,2}$

بحذف الصف الثالث

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

بحذف العمود الثاني

$$M_{3\,2} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3)(6) - (2)(-4) = 26$$

The cofactors of $a_{3\,2}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$$C_{3\,2} = (-1)^{3+2} \times M_{3\,2}$$

$$C_{3\,2} = (-1)^{5} \times 26 = -26$$

Cofactor expansion Along Row or Column

- Find the determined by Cofactor expansion Along first Row then first Column

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

أوجد المحددة بواسطة العامل حسب الصف الاول والعمود الاول

Solution : الحل

1. First Row

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=3\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 5 & 4\end{vmatrix}$$

$$=3\big((-4)(-2)-(4)(3)\big)-\big((-2)(-2)-(5)(3)\big)+0$$

$$=3(8-12)-(4-15)+0$$

$$=3(-4)-(-11)$$

$$=-12+11$$

$$=-1$$

2. First Column

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=3\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}$$

$$=3\big((-4)(-2)-(4)(3)\big)-(-2)\big((1)(-2)-(4)(0)\big)+5((1)(3)-(-4)(0))$$

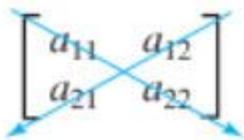
$$=3(8-12)-(-2)(-2)+5(3)$$

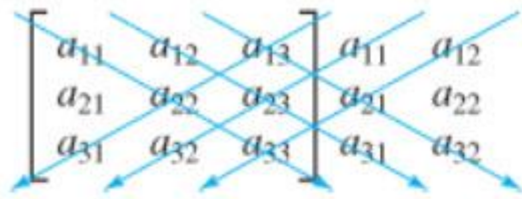
$$=3(-4)-4+15$$

$$=-12+11$$

$$=-1$$

A Useful Technique for Evaluating 2 × 2 and 3 × 3 Determinants





- Calculate $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$?

Solution الحل

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{array}$$

$$\det(A) = (1)(0)(2) + (5)(2)(3) + (-3)(1)(-1) - (-3)(0)(3) - (1)(2)(-1) - (5)(1)(2)$$

$$\det(A) = 0 + 30 + 3 - 0 + 2 - 10$$

$$\det(A) = 33 - 8 = 41$$

Cramer’s Rule : قاعدة كرامر

قاعدة كرامر : عندنا المعالتين التاليتين :

$$ax + by = m$$

$$fx + gy = n$$

معاملات المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|A|}$ and $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|A|}$

لإيجاد المحددة : $|A| = ag - fb$

- Using Cramer’s Rule to solve ?

$$5x - 6y = 15$$

$$3x + 4y = -29$$

Solution الحل

حساب محددة مصفوفة المعاملات

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (5)(4) - (3)(-6)$$

= 20+18 =38

بالتعويض

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38}$$

بحساب المحددات

$$= \frac{15(4)-(-29)(-6)}{38} \qquad = \frac{5(-29)-(3)(15)}{38}$$

$$= \frac{60-174}{38} \qquad = \frac{-145-45}{38}$$

$$= -\frac{114}{38} = -3 \qquad = -\frac{190}{38} = -5$$

Chapter 3

Vectors المتجهات

$If\ v = (1,-3,2)\ \ and\ \ w = (4,2,1), find\ v + w\ and\ v - w\ ?$

Solution الحل

$v + w = (1 + 4\ \ ,\ \ -3 + 2\ \ ,\ \ 2 + 1)$

$= (5,-1,3)$

$v - w = (1 - 4\ \ ,\ \ -3 - 2\ \ ,\ \ 2 - 1)$

$= (-3\ ,-5\ ,\ 1)$

Norm of a vector:

- **The Norm or The length of a vector قانون حساب طول المتجه**

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

تطبيق :

Find Norm or the length of vector v=(-1,3) ?

Ans:

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

- **Distance between two vectors قانون حساب مسافة المتجه بين متجهين**

The distance between two vectors u and v in R^n is

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

تطبيق :

Find the distance between u=(0,2) and v=(2,0) ?

Ans:

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(0-2),(2-0)\| = \|-2,2\|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

- **Unit vectors قانون وحدة المتجهات**

$$v = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|} v$$

Stander unit vectors in R^2 or R^3

In R^2 $i = (1,0)$ and $j = (0,1)$

In R^3 $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ and $k = (0,0,1)$

Dot product of vectors قانون الضرب القياسي للمتجهات

The dot product :

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

تطبيق :

Find the dot product of u=(1,2) and v=(0,3) ?

Ans:

$$u \cdot v = (1 \times 0) + (2 \times 3\ )$$

= 0 + 6 = 6

The angle between two vectors قانون حساب الزاوية بين متجهين

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}$$

تطبيق :

Find the angle between two vectors u=(2,1,0) and v=(0,3,4)?

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}$$

$$u \cdot v = (2 \times 0) + (1 \times 3\ ) + (0 \times 4)$$

= 0 + 3 + 0 = 3

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Orthogonality التعامد

Two vectors are orthogonal if $u \cdot v = 0$

المتجهان متعامدان عندما يساوي صفر.

تطبيق :

Show the u=(-2,3,1,4) and v=(1,2,0,-1) ?

Ans:

$$u \cdot v = (-2)(1) + (3\,)(2) + (1)(0) + (4)(-1)$$

$$= -2 + 6 - 4 = 0$$

:. Vectors are orthogonal

Calculate $u \cdot (v \times w)$ *where* $u = (1,-3,4)$ *and* $v = 2i - 3j + k \quad , \quad w = -i + 4j - 3k$

$$v \times w = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} = i\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= i((-3)(-3) - (4)(1)) - j((2)(-3) - (-1)(1)) + k((2)(4) - (-1)(-3)$$

$$= 5i + 5j + 5k$$

$$v \times w = (5,5,5)$$

$$u \cdot (v \times w) = (1,-3,4) \cdot (5,5,5)$$

$$= (1)(5) + (-3)(5) + (4)(5)$$

$$= 5 - 15 + 20$$

$$= 10$$

Linear combination :

Find a linear combination let $u = (1,2,-1)$ and $v = (6,4,2) \in R^3$, show that $w = (9,2,7)$ is linear combination of u & v.

Solution الحل

المعطيات في السؤال

$w = (9,2,7)$, $u = (1,2,-1)$, $v = (6,4,2)$

بالتعويض في المعادلة

$w = a\ u + b\ v$ 1

ضرب

$(9,2,7) = a\,(1,2,-1) + b\,(6,4,2)$

$= (a, 2a, -a) + (6b, 4b, 2b)$

$= (a + 6b\ ,\ 2a + 4b\ ,\ -a + 2b)$

نحول العناصر الى معادلات

$a + 6b = 9$ 2

$2a + 4b = 2$ 3

$-a + 2b = 7$ 4

نجمع المعادلة 2 مع المعادلة 4

$\cancel{a} - \cancel{a} + 6b + 2b = 9 + 7$

$8b = 16$

$\boxed{b = \frac{16}{8} = 2}$

بالتعويض في المعادلة 2

$a + 6(2) = 9$

$a + 12 = 9$

$a = 9 - 12$

$\boxed{a = -3}$

بالتعويض في المعادلة 1

$w = a\ u + b\ v$

$\boxed{w = -3\ u + 2\ v}$

الناتج النهائي

Linear Independence and Dependence:

$S = \{v_1, v_2, v_3, \dots \dots., v_r\}$ اذا كان عندنا مجموعة من المتجهات

نقوم بتحويلها الى معادلة: $\boxed{C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 + \dots + C_rv_r = 0}$

إذا كانت النتائج تساوي صفر فهي S *is call L .I*

إذا كانت النتائج لا تساوي صفر فهي S *is call L .D*

تطبيق :

- **The standard unit vector S *in* R^3 *in L.I***

Solution الحل

In R^3 $\quad i = (1,0,0) \quad j = (0,1,0) \quad k = (0,0,1)$

$C_1i + C_2j + C_3k = 0$ بالتعويض فى المعادلة

$C_1(1,0,0) + C_2(0,1,0) + C_3(0,0,1) = (0,0,0)$ نضرب

$(C_1, 0,0) + (0, C_2, 0) + (0,0, C_3) = (0,0,0)$ نجمع

$(C_1, C_2, C_3) = (0,0,0)$

$\boxed{C_1 = 0 \quad , \quad C_2 = 0 \quad , \quad C_3 = 0}$

$S = \{i, j, k\}$ *is L.I*

تطبيق :

- **Determine whether the vectors the set** $S\ \{(1,-2,3)\ ,(5,6,-1)\ ,(3,2,1)\}$ **is L.I or L.D ?**

Solution الحل

In R^3 $\quad i=(1,-2,3) \quad j=(5,6,-1) \quad k=(3,2,1)$

$$C_1 i + C_2 j + C_3 k = 0$$

بالتعويض فى المعادلة

$$C_1(1,-2,3) + C_2(5,6,-1) + C_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

نضرب

$$(C_1,-2C_1,3C_1) + (5C_2,6C_2,-1C_2) + (3C_3,2C_3,C_3) = (0,0,0)$$

نجمع

$$(C_1+5C_2+3C_3\ ,\ -2C_1+6C_2+2C_3\ ,\ 3C_1-1C_2+C_3) = (0,0,0)$$

$$C_1+5C_2+3C_3=0$$

$$-2C_1+6C_2+2C_3=0$$

$$3C_1-1C_2+C_3=0$$

لو قمنا بحل المعادلات فإن النتيجة تكون صفر لجميع المتغيرات

Now :

$$\boxed{C_1=C_2=C_3=0 \quad \text{then L.I}}$$

Chapter 5

القوانين المهمة في حل المسائل

- **قانون حساب طول المتجه The length of a vector**

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

تطبيق :

Find the length of v=(-1,3) in ?

Ans:

$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$ = $\sqrt{1+9}$ = $\sqrt{10}$

- **قانون حساب مسافة المتجه بين متجهين Distance between two vectors**

-

The distance between two vectors u and v in R^n is

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

تطبيق :

Find the distance between u=(0,2) and v=(2,0) ?

Ans:

$d(u,v) = \|u - v\| = \|(0-2),(2-0)\| = \|-2,2\|$

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

قانون ضرب القياسي للمتجهات Dot product of vectors

The dot product :

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

تطبيق :

Find the dot product of u=(1,2) and v=(0,3) ?

Ans:

$u \cdot v = (1 \times 0) + (2 \times 3)$

= 0 + 6 = 6

The angle between two vectors قانون حساب الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

تطبيق :

Find the angle between two vectors u=(2,1,0) and v=(0,3,4)?

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$u \cdot v = (2 \times 0) + (1 \times 3\ ) + (0 \times 4)$$

$= 0 + 3 + 0 = 3$

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

Chapter 6

Inner product space

- خصائص Inner product space وهي : التي تساعد على حل المسائل وتطبيقها في الحل ..

1. $< u, v >=< v, u >$
2. $< u, v + w >=< u, v > +< u, w >$
3. $c < u, v > = < cu, v >$
4. $< v, v > \geq 0$ and $< v, v > = 0$ if and $only$ if $v = 0$

تطبيق :

Show that the function defines an inner product on R^2, where $u=(u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ $< u, v > = u_1v_1 + 2u_2v_2$ satisfy the four inner products Axioms.

طريقة الحل حسب الخصائص :

1. Axiom $< u, v >=< v, u >$

عملية إبداليه يعنى انك تضع u مكان v والعكس

$$< u, v >= u_1v_1 + 2u_2v_2$$
$$= v_1u_1 + 2v_2u_2 =< v, u >$$

2. Axiom $< u, v + w >=< u, v > +< u, w >$

u تتوزع على v وكذلك w

Let $w = (w_1, w_2)$

$$< u, v + w >= u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2)$$
$$= u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2)$$

فك الأقواس

$$= \underline{u_1v_1} + \underline{u_1w_1} + 2\underline{u_2v_2} + 2\underline{u_2w_2}$$

نجمع الحدود المتشابهة حسب المعادلة المعطاة

$$= (u_1v_1 + 2u_2v_2) + (u_1w_1 + 2u_2w_2)$$
$$=< u, v > +< u, w >$$

3. Axiom $c < u, v > = < cu, v >$

$$c < u, v > = c(u_1v_1 + 2u_2v_2)$$
$$= (cu_1)v_1 + 2(cu_2)v_2$$
$$=< cu, v >$$

4.Axiom $< v, v \geq > 0$

$$(v_1 \times v_1) + 2(v_2 \times v_2) \geq 0$$
$${v_1}^2 + 2{v_2}^2 \geq 0$$

$$< v, v > = 0 \quad \Rightarrow \quad {v_1}^2 + 2\,{v_2}^2 = 0 \qquad \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

Calculating the inner products $< u - 2v, 3u + 4v >$?

Ans :

$$< u - 2v, 3u + 4v > = < u, 3u + 4v > - < 2v, 3u + 4v >$$

$$= < u, 3u > + < u, 4v > - < 2v, 3u - 2v, 4v >$$

$$= 3 < u, u > +4 < u, v > -6 < v, u > -8 < v, v >$$

$$= 3\,\|u\|^2 - 2 < u, v > -8\,\|v\|^2$$

شرح بسيط للقيم الذاتية Eigenvalues والمتجهات الذاتيه Eigenvectors

قوانين الحل :

القانون العام $A_x = \lambda_x$

قانون لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalues

$$|A - \lambda I| = 0$$

أو

$$|\lambda I - A| = 0$$

قانون لإيجاد المتجهات الذاتية Eigenvectors

$$|A - \lambda I|x = 0$$

❖ Find Eigenvalues and Eigenvectors of a 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

خطوات الحل لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalue:

1- لإيجاد دلتا مع λI

I تعني المتطابقة Identity

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda I = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

نحول المصفوفة الى المحددة وتسمى المعادلة المميزة

Characteristic Equation

لتوضيح حل المحددة :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (\mathbf{a} * \mathbf{d}) - (\mathbf{b} * \mathbf{c})$$

مع الانتباه للإشارات

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 2) - (6)(3)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 5\lambda + 10 - 18$$

طريقة حل المعادلة البحث عن عددين
ضربهما هو -8 ومجموعهما -7 ناتج
العددين هما +1 و -8

$$=\lambda^2 - 7\lambda - 8$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$$

المعادلة المميزة

Characteristic Equation

$$(\lambda + 1)(\lambda - 8) = 0$$

$$(\lambda + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$(\lambda - 8) = 0 \Longrightarrow \lambda = +8$$

The eigenvalues are $\lambda = -1$ *or* $\lambda = 8$

<u>**قانون لإيجاد المتجهات الذاتيه Eigenvectors**</u>

$$|\lambda I - A|x = 0$$

Put $\lambda = -1$

نأخذ القيمة $\lambda = -1$ لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

نعوض بدل الدلتا -1

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (-1) - 5 & 3 \\ 6 & (-1) - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثانى مع تغيير الاشارة

$$-6x_1 + 3x_2 = 0$$

$$-6x_1 = -3x_2$$

نعوض في أحد المتغيرات x_1 بأي رقم ماعدا 0

$$x_1 = 1$$

$$(-6)(1) = -3x_2$$

$$\frac{-6}{-3} = \frac{-3x_2}{-3}$$

بقسمة الطرفين على 3-

$$x_2 = 2$$

An eigenvector $\binom{1}{2}$

نأخذ القيمة الذاتية 8 = ⅄ لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

Put ⅄= 8

$$|\lambda I - A|x = 0$$

نعوض بدل الدلتا 8

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 - 5 & 3 \\ 6 & 8 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثانى مع تغيير الاشارة

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

نعوض في أحد المتغيرات x_2 بأي رقم ماعدا 0

$$3x_1 = -3x_2$$

$$x_2 = -1$$

$$3x_1 = -3(1)$$

بقسمة الطرفين على 3

$$\frac{3x_1}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$x_1 = 1$$

An eigenvector $\binom{1}{-1}$

Orthogonal Matrix شرح

قانون

$$A^{-1} = A^{T}$$

$$A^{T}A = I$$

Show that matrix $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **is orthogonal.**

الحل:

نطبق القانون لاثبات أن المصفوفة متعامدة :

$$A^{T}A = I$$

أولا – نجد تبديل المصفوفة (transpose matrix)

$$A^{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ثانياً – نضرب المصفوفة في تبديل المصفوفة (transpose matrix)

$$AA^{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$AA^{T} = I$ **is Orthogonal**

Find A^{-1} ?

بما أن $A^{-1} = A^{T}$ فإن الجواب هو تبديل المصفوفة A^{T} هو :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Quadratic Forms : (نماذج من الدرجة الثانية (التربيعي

Express the quadratic forms in matrix , then the associated symmetric

$$3x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_3x_1$$

الحل :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

المرفوع إلى القوة تضعها في القطر حسب الرقم المحدد بالوان الصفر يعني الصفوف

- يعني الصف الاول والعمود الاول
- يعني الصف الثاني والعمود الثاني
- يعني الصف الثالث والعمود الثالث

بالقسمة على $\frac{1}{2}$ لكل رقم

- يعني الصف الاول والعمود الثاني
- يعني الصف الاول والعمود الثالث
- يعني الصف الثالث والعمود الاول

Conjugate transpose

If A is a complex matrix, then the ***conjugate transpose*** of A, denoted by A^* , is defined by

$$A^* = \bar{A}^{\,T}$$

Find the conjugate transpose A^* of the matrix

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}}$$

الحل :

حسب القانون $A^* = \bar{A}^{\,T}$

1- نجد نفي $\bar{A}$ ننظر إلى المتغير في المصفوفة نغيير إشارة

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1-i} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3+2i} & \boldsymbol{-i} \end{bmatrix}$$

2- نجد تبديل المصفوفة المنفية $\bar{A}^{\,T}$ *يعني نحول الصف الاول في العمود الاول وكذلك الصف الثاني في العمود الثاني*

$$\bar{A}^{\,T} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

شرح المصفوفة Unitary

Definition of a Unitary Matrix

A complex matrix A is **unitary** if

$$A^{-1} = A^*.$$

$$AA^* = A^*A = I$$

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ **is unitary.**

$AA^* = I$

$A^* = \bar{A}^T$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

is unitary

Chapter-8

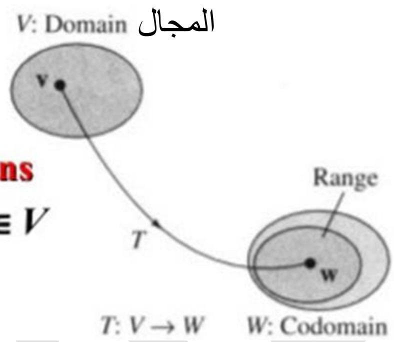
Linear Transformations

- A linear transformation is a function T that maps a vector space V into another vector space W:

$$T: V \xrightarrow{\text{mapping}} W, \quad V, W: \text{vector space}$$

V: the domain of T

W: the co-domain of T



المجال

المجال المقابل

متى نقول أنها تحويل خطي إذا تحقق الشرطين

Two axioms of linear transformations

(1) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(2) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}), \quad \forall c \in R$

- Image of $\mathbf{v}$ under T:

If $\mathbf{v}$ is in V and $\mathbf{w}$ is in W such that

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

Then $\mathbf{w}$ is called the image of $\mathbf{v}$ under T.

- **the range of T:**

The set of all images of vectors in V.

$$range(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \forall \mathbf{v} \in V\}$$

- the pre-image of $\mathbf{w}$:

The set of all $\mathbf{v}$ in V such that $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$.

- Notes:

(1) A **linear transformation** is said to be **operation preserving**.

$$\underbrace{T(\mathbf{u}+\mathbf{v})}_{\text{Addition in } V} = \underbrace{T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})}_{\text{Addition in } W} \qquad \underbrace{T(c\mathbf{u})}_{\text{Scalar multiplication in } V} = \underbrace{cT(\mathbf{u})}_{\text{Scalar multiplication in } W}$$

(2) A linear transformation $T: V \to V$ from **a vector space into itself** is called a **linear operator**.

Q1. $T: R^2 \to R^2 \; v = (v_1, v_2) \in R^2$, $T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

a. Find the image of $v = (-1,2)$?
b. Find the pre-image of $w = (-1,11)$?

Solution:

a. $v = (-1,2)$

$\mathrm{T(v)} = \mathrm{T}(-1,2) = (-1 - 2, -1 + 2(2))$

$= (-3,3)$

b. $T(v) = w = (-1,11)$
We know $T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) = (-1,11)$

نحول المسألة إلى معادلتين ... لنتمكن من إيجاد القيم

$$v_1 - v_2 = -1$$

$$-v_1 - 2v_2 = -11$$

Multiple -1 and Add

$$-3v_2 = -12$$

$$v_2 = \frac{-12}{-3} = 4$$

بالتعويض في المعادلة الأولي :

$$v_1 - 4 = -1$$

$$v_1 = -1 + 4 \Longrightarrow v_1 = 3$$

So (3,4) per-image of (-1,11)

Q1. Verify a linear Transformation T from R^2 *into* R^2

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$$

Solution:

Let $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ *and* c *is any real number*

1. Let $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$
$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$$
\begin{aligned}
T(u+v) = {} & T(u_1+v_1\,, u_2+v_2) \\
& = ((u_1+v_1) - (u_2+v_2)\;, (u_1+v_1) + 2(u_2+v_2)) \\
& = ((u_1-u_2) + (v_1-v_2)\,, (u_1+2u_2) + (v_1+2v_2)) \\
& = \left((u_1-u_2, u_1+2u_2) + (v_1-v_2, v_1+2v_2)\right) \\
& = T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

2. $cu = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2)$

$$
\begin{aligned}
T(cu) = T(cu_1, cu_2) & = (cu_1 - cu_2, cu_1 + 2cu_2) \\
& = c(u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) \\
& = cT(u)
\end{aligned}
$$

:. T is a linear transformation.

- Zero transformation :

$$T: V \to W \qquad T(v) = 0, \quad \forall v \in V$$

- Identity transformation:

$$T: V \to V \qquad T(v) = v, \quad \forall v \in V$$

Q1. Let $T: R^3 \to R^3$ *be a linear transformation* such that

$T(1,0,0) = (2,-1,4)$
$T(0,1,0) = (1,5,-2)$
$T(0,0,1) = (0,3,1)$

Find $T(2,3,-2)$?

Solution:

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$$

$T(2,3,-2) = 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1)$

$= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2(0,3,-2)$

$= (7,7,0)$

Q2. The function$T: R^3 \rightarrow R^3$ *is defined by*

$$T(u) = Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Find $T(u)$ *where* $v = (2, -1)$?

Solution:

$$v = (2, -1)$$

$$T(u) = Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore T(2, -1) = (6,3,0)$$

<u>**طريقة إثبات أن المعادلة تحويله خطية أم لا**</u>

- Check whethe the map $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ given by $T(x, y) = (x + y, x)$ is linear or not.

لتكن العبارة تحويل خطي لابد أن تتحقق الخواص :

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. $CT(x) = TC(x)$

<u>Solution:</u>

Take any $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ $\in \mathbb{R}^2$ $and\ C \in \mathbb{R}^2$

$$T(x + y) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$

$$= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y})$$

بالتعويض في المسألة التي في السؤال تعطينا :

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2\ ,\ x_1 + x_2)$$

نجمع الحدود المتشابهة تعطينا:

$$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2\ ,\ x_1 + x_2)$$

$$= (x_1 + y_1, x_1) + (x_2 + y_2\ ,\ x_2)$$

$$= T(x_1 + y_1, x_1) + T(x_2 + y_2\ ,\ x_2)$$

$$= T(x) + T(y)$$

Check :

$$CT(x) = TC(x)$$

$$= TC(x_1, y_1)$$

$$= T(Cx_1, Cy_1)$$

بالتعويض في المسألة التي في السؤال تعطينا :

$$= (Cx_1 + Cy_1, Cx_1)$$

نأخذ C عامل مشترك

$$= C(x_1 + y_1, x_1)$$

$$= CT(x_1 + y_1, x_1)$$

$$= CT(x)$$

A linear transformation

شرح التحلل الخطي LU-decomposition

Find an LU-decomposition of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

نطبق القاعدة A=LU

نضع القطر واحد .... حسب الصيغة الاساسية : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

نحول المصفوفة A الى مصفوفتين – المصفوفة الاولي U المصفوفة الثانية

$U=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

ننظر الخانة الاولي في الصف الاول اذا كانت واحد نضعها مباشرة في المصفوفة المقابلة

$L=\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$

نضع بدل x و 1

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

ننظر الخانة الاولي في الصف الثاني ثم نضعها 0

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$

العملية الحسابية : الناتج نضعه في المصفوفة

2-2*(1)=0

5-2*(3) =5-6=-1

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

نضع بدل x و 2

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & x \end{bmatrix}$

العملية الحسابية : الناتج نضعه في المصفوفة

(-1)(0)=0

(-1)(-1)=1

$R_2 \to (-1)R_2$

نضع بدل x و -1

$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$A = L \quad U$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

حاصل ضرب المصفوفتين LU يساوي المصفوفة A

Find an LU-decomposition of matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Solution:</u>

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \frac{R_1}{5} \qquad\qquad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 \longrightarrow R_2 + R_1 \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \quad -\frac{5R_2}{6} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & x \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad L = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Find the singular values of $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>Solution:</u>

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

The characteristic equation is :

$$|\lambda I - A^T A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 5) - (-4)(-4) = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{1} = 1$$

Are not the Signaler values.

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3$$

- Find a LU Decomposition :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

القاعدة :

$$\mathbf{A = LU}$$

$$U = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \frac{R_1}{6} \qquad L = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \boxed{R_2 \to R_2 - 9R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 3R_1} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \boxed{\frac{R_2}{2}} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & x & 0 \\ 3 & x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \boxed{R_3 \to R_3 - 8R_2} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{R_3 \to (1)R_3} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & x \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linear programming problem شرح

Solve the linear programming problem by graphical method ?

$$\max \quad Z = 50x + 18y$$

Subject to $2x + y \leq 100$

$$x + y \leq 80$$

$$x \geq 0\,, y \geq 0$$

الحل :

From 1

$2x + y = 100$

$2x + (0) = 100$

$x = \frac{100}{2} = 50$

$2x + y = 100$

$2(0) + y = 100$

$y = 100$

x	50	0
y	0	100

From 2

$x + y = 80$

$x + (0) = 80$

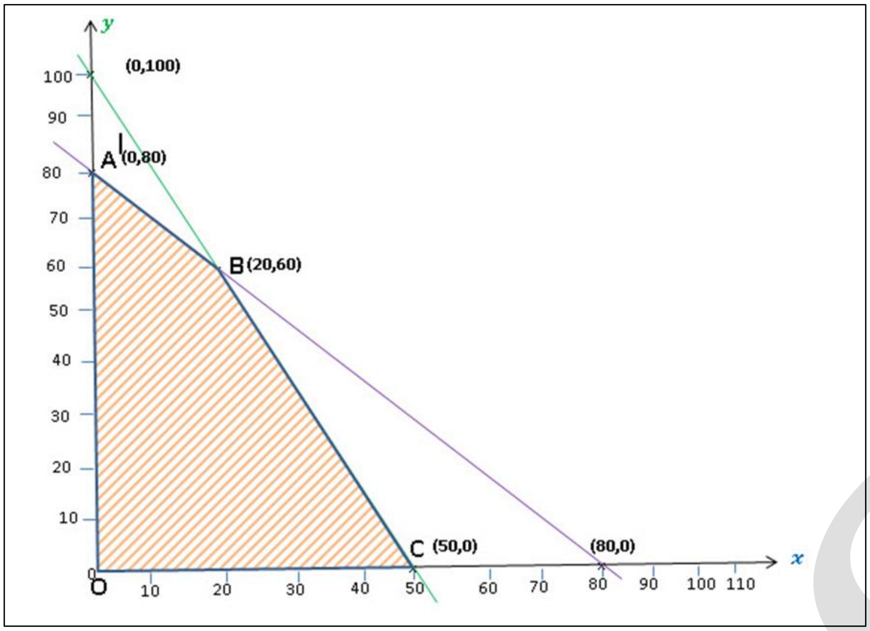
$x = 80$

$x + y = 80$

$(0) + y = 80$

$y = 80$

x	80	0
y	0	80



So the feasible region is O(0,0) ,A(0,80) , B(20,60) , C(50,0)

verses	$Z = 50x + 18y$
O(0,0)	$50(0) + 18(0) = 0$
A(0,80)	$50(0) + 18(80) = 1440$
B(20,60)	$50(20) + 18(60) = 2080$
C(50,0)	$50(50) + 18(0) = 2500$

Since our subject is to max Z So the optimize Solution is C(50,0)

The optimize value is 2500

LINEAR PROGRAMMING شرح بسيط ل

Q7. Solve the following LPP by graphical method:

$$\max z = 13x_1 + 11x_2 \text{ subject to:}$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 1500$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 1575$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 420$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solution:

$$4x_1 + 5x_2 = 1500$$
$$4(0) + 5x_2 = 1500$$
$$5x_2 = 1500$$
$$x_2 = \frac{1500}{5} = 300$$

x_1	0	375
x_2	300	0

$$4x_1 + 5(0) = 1500$$
$$4x_1 = 1500$$
$$x_1 = \frac{1500}{4} = 375$$

$$5x_1 + 3x_2 = 1575$$
$$5(0) + 3x_2 = 1575$$
$$5x_2 = 1575$$
$$x_2 = \frac{1575}{3} = 525$$

x_1	0	315
x_2	525	0

$$5x_1 + 3x_2 = 1575$$
$$5x_1 + 3(0) = 1575$$
$$x_1 = \frac{1575}{5} = 315$$

$$x_1 + 2x_2 = 420$$
$$(0) + 2x_2 = 420$$
$$x_2 = \frac{420}{2} = 210$$

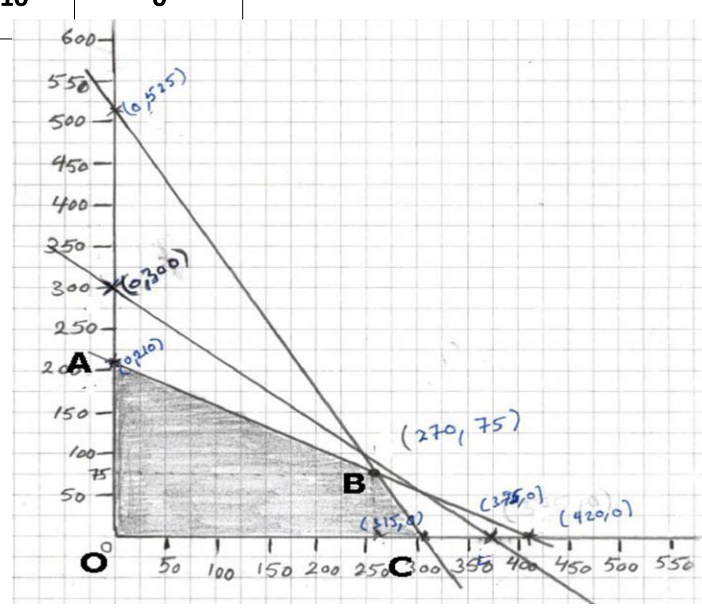
x_1	0	420
x_2	210	0

$$x_1 + 2x_2 = 420$$
$$x_1 + 2(0) = 420$$
$$x_1 = 420$$

$x_1 + 2x_2 = 420$ multiple 5

$5x_1 + 3x_2 = 1575$ multiple -1

$$5x_1 + 10x_2 = 2100$$
$$-5x_1 - 3x_2 = -1575$$
$$7x_2 = 525$$
$$x_2 = \frac{525}{7} = 75$$
$$x_1 + 2(75) = 420$$
$$x_1 + 150 = 420$$
$$x_1 = 420 - 150$$
$$x_1 = 270$$



Draw the table:

verses	$z = 13x_1 + 11x_2$
A=(0,210)	13(0)+11(210)=2310
O=(0,0)	13(0)+11(0)= 0
C=(315,0)	13(315)+11(0)=4095
B=(270,75)	13(270)+11(75)=4335

Maximum value of 4335 point B (270,75)

شرح الواجب الثالث :

السؤال الثاني :

2. Select one of the alternatives from the following questions as your answer.

(a) The characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ is

A. $\lambda^2 - 7\lambda - 10 = 0$
B. $\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0$
C. $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$
D. $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$

معنى السؤال ماهي المعادلة المميزة في المصفوفة : حل الاختيار من قانون eigenvalue نجد المعادلة ..

$$|\lambda I - A| = 0$$

نوجد المحددة

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

اضرب الاقواس

$$(\lambda - 3)(\lambda - 4) - (-1)(-2) = 0$$

اجمع

$$\lambda^2 - 4\lambda - 3\lambda + 12 - 2 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0}$$

نلاحظ أن المصفوفة A مرفوعة الى قوة 3
يعني أن $(1)^3, (4)^3, (-3)^3$

(b) The eigenvalues of the matrix A^3, where $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, are

A. $\{1, 4, -3\}$
B. $\{1, 12, -9\}$
C. $\{1, 64, 27\}$
D. $\{1, 64, -27\}$

لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalueفي المثلث الصفري العلوي أو السفلي نأخذ القطر المحدد بالوان الاحمر.

(c) Which of the following sets of vectors are orthogonal with respect to the Euclidean inner product on $\mathbb{R}^2$:

A. (1,2), (-2,1)
B. (3,4),(2,6)
C. (6,9),(5,2)
D. (0,4), (0,6)

قيمة المتجه المتعامد تساوي صفر

$$u \cdot v = 0$$

$$u \cdot v = (1)(-2) + (2)(1)$$
$$= -2 + 2 = 0$$

(d) If angle between vectors u and v is zero such that $\|u\| = 4$, $\|v\| = 6$, then $< u, v >=$

A. 10
B. 24
C. $\sqrt{24}$
D. $\sqrt{10}$

القانون لايجاد الزاوية بين متجهين :

$< u, v > = \|u\| \cdot \|v\|$

$< u, v > = 4 \cdot 6 = 24$

(e) If $3x_1^2+2x_2^2-4x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_2x_3$ be the quadratic form, then the associated symmetric matrix will be

A. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

القاعدة :

$a_{ii} = (\text{coefficient } x_i^2)$

$a_{ij} = \left(\frac{1}{2}\text{coefficient } x_i \cdot x_j\right) if\ i \neq j$

i تعني الصفوف

j تعني الاعمدة

(f) For which value of a and b, the matrix $\begin{bmatrix} 3 & i+2 & 2+6i \\ a & -1 & 2i-1 \\ 2-6i & b & 1 \end{bmatrix}$ is Hermitian?

A. $a = i-2$, $b = -2i-1$
B. $a = -i+2$, $b = 2i+1$
C. $a = -i+2$, $b = -2i-1$
D. $a = i-2$, $b = 2i+1$

المتناظرة ننظر الى اشارة معامل المتغير فقط إذا كانت سالب نحولها الى موجب .
أما العدد الصحيح لا تغيير في الاشارة.

$a = -i + 2$

$b = -2i - 1$

Q3.Find all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda) - (2)(-3) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

The eigenvalues are $\lambda_1 = 2 \quad or \quad \lambda_2 = 3$

Eigen Vectors:

Put $\lambda_1 = 2$ نوجد قيمة المتجه عندما يكون 2

$$|\lambda I - A|x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-3x_1 = -2x_2$$

Let is assume $x_1 = 1$

$$-3(1) = -2x_2$$

$$-3 = -2x_2$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

An eigenvectors $(1, \frac{3}{2})$

Put $\lambda_1 = 3$ نوجد قيمة المتجه عندما يكون 3

$$|\lambda I - A|x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} R_1 \longrightarrow 3R_1 \\ R_2 \longrightarrow 2R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-6x_1 + 6x_2 = 0$$

$$-6x_1 = -6x_2$$

Let is assume $x_1 = 1$

$$-6(1) = -6x_2$$

$$-6 = -6x_2$$

$$x_2 = 1$$

An eigenvectors (1,1)

Q4. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1+3i & 2 \\ 3+i & 4-i \end{bmatrix}$ Find $\overline{A}$, $\mathrm{Re(A)}, \mathrm{Im(A)}, \mathrm{Tr(A)}$ and $\det(\mathrm{A})$?

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-3i & 2 \\ 3-i & 4+i \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Re(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Im(A)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr(A)} = (1+3i) + (4-i)$$

$$= 5 + 2i$$

$$\det(\mathrm{A}) = (1+3i)(4-i) - (2)(3+i)$$

$$= 4 - i + 12i - 3i^2 - 6 - 2i$$

$$= 4 - i + 12i - 3(-1) - 6 - 2i$$

$$= 4 - i + 12i + 3 - 6 - 2i$$

$$= 1 + 9i$$

Q5. Find the value of k, for which the matrices $U = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $and\ V = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ k & 4 \end{bmatrix}$ are orthogonal in the vector space $M_{2\times2}$ with usual inner product on $M_{2\times2}$.

$$(U \cdot V) = (9)(2) + (4)(-2) + (2)(k) + (6)(4)$$

$$= 18 - 8 + 2k + 24$$

$$34 + 2k = 0$$

$$2k = -34$$

$$k = -17$$

Q6. Find the least squares solution of the system of linear equation Ax = B , where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

القاعدة

$$Ax = b$$

$$A^T A = A^T b$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$9x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$5x_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{5}$$

Q7. Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ **is unitary.**

القاعدة

$AA^* = I$

$A^* = \bar{A}^T$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Q8. Show that matrix $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$ is orthogonal and find A^{-1}

القاعدة

$A^T A = I$

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$ Is orthogonal

$A^{-1} = A^T$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

شرح الواجب الرابع :

السؤال الثاني :

2. Select one of the alternatives from the following questions as your answer.

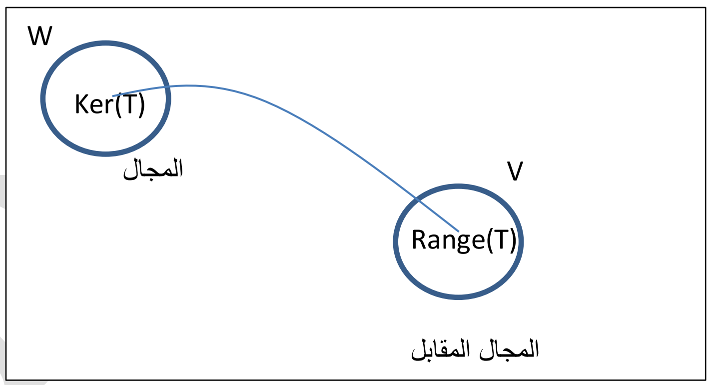
   (a) If $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear operator given by $T(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$, then which of the following vector is in $ker(T)$?

   A. $(1, 4)$
   B. $(2, 1)$
   C. $(1, 1/2)$
   D. $(1/2, 1)$

نوجد ker(T)=0
المعادلتين متساويتين
نأخذ أحد المعادلتين ونعوض فيها بأحد
النقاط التي في الخيارات

(b) If $T : W \to V$ be a linear transformation, then $ker(T)$ and $range(T)$ are subspaces of vector space(s)

   A. V.
   B. W.
   C. W and V respectively.
   D. V and W respectively.



(c) Which of the following sets of eigenvalues have a dominant eigenvalue:

   A. $\{8, -7, -6, 8\}$
   B. $\{-5, -2, 2, 4\}$
   C. $\{-3, -2, -1, , 0, 1, 2, 3\}$
   D. None of the above

نأخذ اكبر قيمة مطلقة في المجموعة ثم نقارنها بالقيم الأخرى بشرط أن
القيمة المطلقة غير متكررة في القيم الذاتية

الاختيار **B** اكبر قيمة مطلقة هي $|-5|$ وغير مكرره

(d) If $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ be a matrix where $B = A^T A$, then the singular values of A are

A. $\{4, 9, 0\}$
B. $\{0, 9, 16\}$
C. $\{4,9,16\}$
D. $\{2, 3, 4\}$

(e) In linear programming, objective function and objective constraints are

A. solved.
B. quadratic.
C. adjacent.
D. linear.

(f) The feasible region

A. is defined by the objective function.
B. is an area bounded by the collective constraints and represents all permissible combinations of the decision variables.
C. represents all values of each constraint.
D. may range over all positive or negative values of only one decision variable.

هي المنطقة المحصورة بين النقاط المحددة وتمثل كل المجموعات المسموح بها من متغيرات.

Q3. Consider the basis $S = \{v_1, v_2\}\ for\ \mathbb{R}^2$, where $v_1 = \{1,1\}$ and $v_2 = \{1,0\}$ and let $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear operator for which $T(v_1) = (1,2)\ and\ T(v_1) = (3,0)$.

Find a formula for $T(x_1, x_2)$ and use it to find $T(2, -4)$.

<u>Solution :</u>

- Find a formula for $T(x_1, x_2)$?

$$(x_1, x_2) = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

$$= c_1(1,1) + c_2(1,0)$$

$$= (c_1, c_1) + (c_2, 0)$$

$$c_1 + c_2 = x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 + c_2 = x_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = x_1 - x_2$$

$$c_1 = x_2$$

$$(x_1, x_2) = x_2(1,1) + x_1 - x_2(1,0)$$

$$T(x_1, x_2) = x_2 T(1,1) + (x_1 - x_2) T(1,0)$$

$$= (x_2)(1,2) + (x_1 - x_2)(3,0)$$

$$= (x_2, 2x_2) + (3x_1 - 3x_2, 0)$$

$$= (x_2 + 3x_1 - 3x_2 \ ,\ \ 2x_2 + 0)$$

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2\ , 2x_2)$$

بالتعويض في المعادلة لإيجاد النقطة

- find $T(2, -4)$?

$$T(2, -4) = ((3)(2) - (2)(-4)\ \ ,\ \ 2(-4))$$

=(12 , -8)

Q4. Check whether the map $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ given by $T(x, y) = (xy, x)$ is linear or not.

<u>Solution</u>:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. $CT(x) = TC(x)$

1. Take any $((x_1, y_1)\ , (x_2, y_2)\ \in \mathbb{R}^2$ and $C \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
T(x + y) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) \\
&= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), x_1 + x_2) \\
&= (x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2\ , x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$

Is not linear transformation.

Q5. Find an LU-decomposition of matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Solution:</u>

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \frac{R_1}{5} \qquad\qquad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 \longrightarrow R_2 + R_1 \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \quad -\frac{5R_2}{6} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & x \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad L = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Q6. Find the singular values of $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>Solution:</u>

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

The characteristic equation is :

$$|\lambda I - A^T A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 5) - (-4)(-4) = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{1} = 1$$

Are not the Signaler values.

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3$$

Q7. Solve the following LPP by graphical method:

$$\max z = 13x_1 + 11x_2 \text{ subject to:}$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 1500$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 1575$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 420$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

<u>Solution:</u>

$$4x_1 + 5x_2 = 1500$$
$$4(0) + 5x_2 = 1500$$
$$5x_2 = 1500$$
$$x_2 = \frac{1500}{5} = 300$$

x_1	**0**	**375**
x_2	**300**	**0**

$$4x_1 + 5(0) = 1500$$
$$4x_1 = 1500$$

$x_1 = \frac{1500}{4} = 375$

$5x_1 + 3x_2 = 1575$
$5(0) + 3x_2 = 1575$
$5x_2 = 1575$
$x_2 = \frac{1575}{3} = 525$

x_1	0	315
x_2	525	0

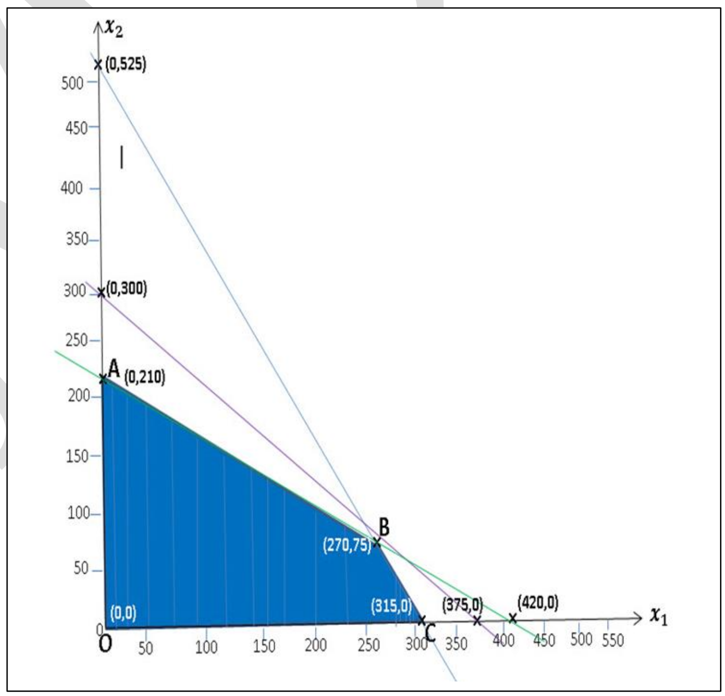
$5x_1 + 3x_2 = 1575$
$5x_1 + 3(0) = 1575$
$x_1 = \frac{1575}{5} = 315$
$x_1 + 2x_2 = 420$
$(0) + 2x_2 = 420$
$x_2 = \frac{420}{2} = 210$

x_1	0	420
x_2	210	0

$x_1 + 2x_2 = 420$
$x_1 + 2(0) = 420$
$x_1 = 420$

$x_1 + 2x_2 = 420$ multiple 5
$5x_1 + 3x_2 = 1575$ multiple -1

$5x_1 + 10x_2 = 2100$
$-5x_1 - 3x_2 = -1575$
$7x_2 = 525$
$x_2 = \frac{525}{7} = 75$
$x_1 + 2(75) = 420$
$x_1 + 150 = 420$
$x_1 = 420 - 150$
$x_1 = 270$



Draw the table:

verses	$z = 13x_1 + 11x_2$
A=(0,210)	13(0)+11(210)=2310
O=(0,0)	13(0)+11(0)= 0
C=(315,0)	13(315)+11(0)=4095
B=(270,75)	13(270)+11(75)=4335

Maximum value of 4335 point B (270,75)